学校编码：10384 分类号 ______ 密级 ______

学号：19020061151753 UDC______

厦门大学

硕　士　学　位　论　文

求解右定两参数特征值问题的精化的 Jacobi-Davidson 方法

Refined Jacobi-Davidson Type Method For A Right Definite Two-Parameter Eigenvalue Problem

滕 忠 铭

指导教师姓名： 卢 琳 璋 教授

专 业 名 称： 计 算 数 学

论文提交日期： 2009 年 5 月

论文答辩日期： 2009 年 月

学位授予日期： 2009 年 月

答辩委员会主席： ____________

评 阅 人： ____________

2009 **年** 5 **月**

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（　），在　　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（　）。

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名：　　　　　　　　日期：　　年　月　日

导师签名：　　　　　　　　日期：　　年　月　日

目　录

Contents

摘　　要

本文讨论如下形式的所谓两参数特征值问题：

$$A_1x_1 = \lambda B_1x_1 + \mu C_1x_1,$$

$$A_2x_2 = \lambda B_2x_2 + \mu C_2x_2.$$

这里的 A_i, B_i, C_i 是 $n_i \times n_i$ 的矩阵， x_i 是 n_i 维的向量， $i = 1, 2$. 如果 (λ, μ), x_1, x_2 满足上述方程，那么就称 (λ, μ) 为特征值， tensor 积 $x_1 \otimes x_2$ 称为特征向量. 两参数的特征值问题具有广泛的应用 [3].

文献 [10] 提出了求解上述问题的右定两参数特征值问题 Jacobi-Davidson 类型的方法. 在文献 [12] 中，作者 M. E. Hochstenbach 和 B. Plestenjak 认为精化的方法不适合两参数特征值问题，并说求解两参数特征值问题的精化方法存在着三个问题：即精化 Ritz 向量收敛性差，运算量大，不能计算多个特征值. 本文指出，事实并非如此. 针对右定两参数特征值问题, 本文提出了一种有效的精化数值方法. 并通过理论证明和数值实验说明了 Ritz 值的收敛性，以及精化 Ritz 向量具有比通常的 Ritz 向量更好的收敛性.

全文共分五个部分：第一章简要的介绍了两参数特征值问题及其背景；第二章介绍在文献 [10] 中提出的求解右定两参数特征值问题的 Jacobi-Davidson 类型的方法；第三章证明了 Ritz 值的收敛性（定理 4 ），并通过此说明了精化的 Ritz 向量具有更好的收敛性, 并举具体例子加以说明; 在第四章中提出本文的算法; 第五章的数值试验中验证了我们的算法的优越性并给出结论.

关键词：右定两参数特征值问题， Jacobi-Davidson 方法， 校正方程， Ritz 对， 精化 Ritz 对， 精化 Jacobi-Davidson 方法.

Abstrcts

In this paper,we discusses the following form of the so-called two-parameter eigenvalue problem:

$$A_1x_1 = \lambda B_1x_1 + \mu C_1x_1,$$

$$A_2x_2 = \lambda B_2x_2 + \mu C_2x_2.$$

where A_i, B_i and C_i are given $n_i \times n_i$ matrices, x_i are n_i vectors for $i = 1, 2.$, λ and μ are scalars. A pair(λ, μ) is called an eigenvalue if it satisfies the above equation for nonzero vectors x_1, x_2. Then the tensor product $x_1 \otimes x_2$ is called the corresponding eigenvector. Two-parameter eigenvalue problems of this kind arise in a variety of applications[3].

A Jacobi-Davidson type method is proposed in [10] for a right definite two-parameter eigenvalue problem. In their paper[12], M. E. Hochstenbach and B. Plestenjak considered that the refined method is not suitable for two-parameter eigenvalue problems because of high costs for computation, poor convergence of refined Ritz vectors and incapacity for computing more than one eigenvalue. In this paper, we show that it is not the case. For a right definite two-parameter eigenvalue problem,We propose an efficient refined Jacobi-Davidson type method and show that refined Ritz vectors have better convergence than Ritz vectors and (refined) Ritz values is convergent.

The paper has been organized as follows. In Chapter 1,we give a introduction of two-parameter eigenvalue problems and its background.In Chapter 2,we review the Jacobi-Davidson method in [10]. In Chapter 3, we prove the convergence of Ritz values (Theorem 4) and illustrate that the convergence of refined Ritz vectors is better than Ritz vectors. Our algorithm is proposed in Chapter 4. We conclude with experiments and a conclusion in Section 5.

Key words: Right definite two-parameter eigenvalue problem, Jacobi-Davidson method, correction equation, Ritz pair, refined Ritz pair, refined Jacobi-Davidson method.

第一章 绪 论

我们称具有如下形式的问题

$$\begin{aligned} A_1x_1 &= \lambda B_1x_1 + \mu C_1x_1, \\ A_2x_2 &= \lambda B_2x_2 + \mu C_2x_2, \end{aligned} \tag{1.1}$$

为两参数的特征值问题. 这里的 A_i, B_i, C_i 是 $n_i \times n_i$ 的矩阵, x_i 是 n_i 维的向量, i=1,2. 如果 (λ,μ), x_1, x_2 满足 (1.1), 那么就称 (λ,μ) 为 (1.1) 的特征值, tensor 积 $x_1 \otimes x_2$ 为相应的特征向量.

求解两参数的特征值问题具有广泛的应用 [3], 例如两参数 Sturm-Liouville 问题 [8],

$$-(p_i(x_i)y_i'(x_i))' + q_i(x_i)y_i(x_i) = (\lambda a_{i1}(x_i) + \mu a_{i2}(x_i))y_i(x_i)$$

$x_i \in [a_i, b_i]$, 边值条件

$$\begin{aligned} y_i(a_i)\cos\alpha_i - y_i'(a_i)\sin\alpha_i = 0, 0 \le \alpha_i \le \pi, \\ y_i(b_i)\cos\beta_i - y_i'(b_i)\sin\beta_i = 0, 0 \le \beta_i \le \pi, \end{aligned}$$

离散化这个问题就得到 (1.1) 形式的两参数特征值问题. 两参数的特征值问题还应用于估计双层材料的电性能 [1], 以及动力模型修正 [13].

假定在 (1.1) 中, A_i, B_i, C_i 都是实对称矩阵,并且对任意的非零的向量 $x \in \mathcal{R}^{n_1}$, $y \in \mathcal{R}^{n_2}$, 行列式

$$\begin{vmatrix} x^TB_1x & x^TC_1x \\ y^TB_2y & y^TC_2y \end{vmatrix}$$

恒为正, 那么我们就称两参数的特征值问题 (1.1) 是右定的. 在右定的条件下, 问题 (1.1) 的特征值都是实的, 特征向量也可以是实的, 并且有 n_1n_2 个线性无关的特征向量 [10]. 本文章仅讨论右定的两参数的特征值问题.

右定的两参数的特征值问题 (1.1) 可以转化为一对广义特征值问题. 令空间

$$S := \mathcal{R}^{n_1} \otimes \mathcal{R}^{n_2},$$

其维数为 $N := n_1 n_2$ ；定义矩阵

$$\triangle_0 = B_1 \otimes C_2 - C_1 \otimes B_2,$$
$$\triangle_1 = A_1 \otimes C_2 - C_1 \otimes A_2,$$
$$\triangle_2 = B_1 \otimes A_2 - A_1 \otimes B_2.$$

因为对称矩阵的 tensor 积还是对称的，所以 $\triangle_0, \triangle_1, \triangle_2$ 为对称矩阵. 文献 [4] 证明了 $\triangle_0^{-1}\triangle_1, \triangle_0^{-1}\triangle_2$ 可交换，问题 (1.1) 等价于

$$\begin{aligned} \triangle_1 z &= \lambda \triangle_0 z, \\ \triangle_2 z &= \mu \triangle_0 z, \end{aligned} \tag{1.2}$$

这里 $z \in S, z = x_1 \otimes x_2$. 容易验证右定的条件等价于 $\triangle_0$ 是对称正定.

引理 1. *属于 (1.1) 的不同特征值的特征向量是 $\triangle_0$ 正交的. 即如果 $x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2$ 是分别属于特征值 $(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2)$ 的特征向量，那么有*

$$(x_1 \otimes y_1)^T \triangle_0 (x_2 \otimes y_2) = 0.$$

目前, 已有多种方法可用来求解右定两参数特征值问题. 第一类是直接法, 通过同时对角化，求解问题 (1.2), 从而得到问题 (1.1) 的特征值和特征向量 [14]. 但由于问题 (1.2) 的维数是 $n_1 \times n_2$, 所以这类方法只有在矩阵阶数较小的时候才可行. 当 n_1, n_2 较大的时，不太可能计算问题 (1.1) 的所有特征对. 幸运的是在实际运用中只需要一部份特征对. 在这种情况下，文献 [10][11] 提出了一种适合于求解部分特征值，以及所对应的特征向量方法： Jacobi-Davidson 类型的方法. 在文献 [12] 中作者 M. E. Hochstenbach 和 B. Plestenjak 讨论了求解两参数特征值问题调和方法，并指出精化方法不适合两参数特征值问题. 文献 [12] 的作者认为精化 Ritz 向量收敛性差，因为和 Ritz 向量相比，它需要更多的条件才能收敛. 本文将说明：事实并非如此，其实精化的 Ritz 向量具有更好的收敛性.

第二章 Jacobi-Davidson 方法

§2.1 子空间方法

子空间方法是求解大型矩阵特征值问题 [9] 的主要方法，其主要思想是把大型特征值问题投影成小型矩阵的特征值问题，在低维的空间上求解其近似特征值，随着子空间的不断扩展，近似特征值将收敛到准确特征值. Arnodi 方法 [7], Jacobi-Davidson 方法 [6] 都属于子空间方法，他们主要的不同在于形成空间基的方式. 子空间方法的主要实现过程是 Rayleigh-Ritz 过程. 下面将 Rayleigh-Ritz 过程应用于两参数特征值问题.

令 $\mathcal{U}_k$,$\mathcal{V}_k$ 分别是属于 $\mathcal{R}^{n_1}$ 和 $\mathcal{R}^{n_2}$ 的 k 维子空间. $U_k \in\mathcal{R}^{n_1\times k}$,$V_k \in\mathcal{R}^{n_2\times k}$ 的列向量分别构成是空间 $\mathcal{U}_k$,$\mathcal{V}_k$ 的一组标准正交基，有 Ritz-Galerkin 条件

$$\begin{aligned}(A_1-\sigma B_1-\tau C_1)u &\perp \mathcal{U}_k,\\ (A_2-\sigma B_2-\tau C_2)v &\perp \mathcal{V}_k,\end{aligned}\tag{2.1}$$

这里 $u \in\mathcal{U}_k/\{0\}$,$v \in\mathcal{V}_k/\{0\}$.(2.1) 式等价于下面方程

$$\begin{aligned}{U_k}^TA_1U_kc &= \sigma {U_k}^TB_1U_kc+\tau {U_k}^TC_1U_kc,\\ {V_k}^TA_2V_kd &= \sigma {V_k}^TB_2V_kd+\tau {V_k}^TC_2V_kd,\end{aligned}\tag{2.2}$$

这里 $u=U_kc\neq 0, v=V_kd\neq 0, c,d \in\mathcal{R}^k$, 且 $\sigma,\tau \in\mathcal{R}$. 若原问题是右定的那么 (2.2) 也是右定的，这里的 k 通常要比 n_1,n_2 小很多.

(σ,τ) 称作问题 (1.1) 对应于空间 $\mathcal{U}_k$,$\mathcal{V}_k$ 的 Ritz 值， $u\otimes v$ 叫作 Ritz 向量, $c\otimes d$ 为原始 Ritz 向量. 有问题 (2.2) 得到 k^2 个 Ritz 对，是问题 (1.1) 的近似特征对. 并可以验证如果 $u\otimes v$ 是对应 Ritz 值 (σ,τ) 的 Ritz 向量，那么 (σ,τ) 等于 $u\otimes v$ 的 tensor Rayleigh 商. 即

$$\sigma = \varrho_1(u,v) = \frac{(u\otimes v)^T\triangle_1(u\otimes v)}{(u\otimes v)^T\triangle_0(u\otimes v)} = \frac{(u^TA_1u)(v^TC_2v)-(u^TC_1u)(v^TA_2v)}{(u^TB_1u)(v^TC_2v)-(u^TC_1u)(v^TB_2v)},$$
$$\tau = \varrho_2(u,v) = \frac{(u\otimes v)^T\triangle_2(u\otimes v)}{(u\otimes v)^T\triangle_0(u\otimes v)} = \frac{(u^TB_1u)(v^TA_2v)-(u^TA_1u)(v^TB_2v)}{(u^TB_1u)(v^TC_2v)-(u^TC_1u)(v^TB_2v)}.$$

于是就将矩阵阶数较大的原问题 (1.1), 转化为阶数较小的问题 (2.2). 可以使用文献 [14] 的方法来求解问题 (2.2).

§2.2 标准 Jacobi-Davidson 类型的方法

Jacobi-Davidson 方法 [6] 是一种子空间方法，其通过不精确的解校正方程来扩展空间. 作者在 [10] 中将 Jacobi-Davidson 方法推广到右定两参数特征值问题，具体推导过程如下.

若 $u\otimes v$ 是问题 (1.1) 的近似特征向量，那么希望找到 $s\perp u, t\perp v$, 使得 $(u+s)\otimes(v+t)$ 是特征值 (λ,μ) 所对应的特征向量，即

$$\begin{aligned} A_1(u+s) &= \lambda B_1(u+s)+\mu C_1(u+s),\\ A_2(v+t) &= \lambda B_2(v+t)+\mu C_2(v+t). \end{aligned} \tag{2.3}$$

令

$$r_1 = (A_1-\sigma B_1-\tau C_1)u,$$
$$r_2 = (A_2-\sigma B_2-\tau C_2)v,$$

表示为 Ritz 对 $(\sigma,\tau), u\otimes v$ 的残量. (2.3) 重新整理得到下式

$$\begin{aligned} (A_1-\sigma B_1-\tau C_1)s &= -r_1+(\lambda-\sigma)B_1u+(\mu-\tau)C_1u+(\lambda-\sigma)B_1s+(\mu-\tau)C_1s,\\ (A_2-\sigma B_2-\tau C_2)t &= -r_2+(\lambda-\sigma)B_2v+(\mu-\tau)C_2v+(\lambda-\sigma)B_2t+(\mu-\tau)C_2t. \end{aligned} \tag{2.4}$$

引理 2. (σ,τ) 是对应于单位 *Ritz* 向量 $u\otimes v$ 的 *Ritz* 值，如果 $(u+s)\otimes(v+t)$ 是对应于特征值 (λ,μ) 的特征向量，那么有

$$\sqrt{(\lambda-\sigma)^2+(\mu-\tau)^2} = O(\|s\|^2+\|t\|^2).$$

此引理说明了如果 Ritz 向量是特征向量关于 s, t 的一阶近似，那么 Ritz 值 (σ, τ) 就是特征值 (λ, μ) 的关于 s, t 二阶近似. 所以 $(\lambda - \sigma)B_1 u + (\mu - \sigma)C_1 u$ 为二阶项， $(\lambda - \sigma)B_1 s + (\mu - \sigma)C_1 s$ 为三阶项. 如果忽略方程 (2.4) 中的二阶项和三阶项，可以得到其中一个校正方程为

$$\begin{cases} (A_1 - \sigma B_1 - \tau C_1)s = -r_1 \\ s \perp u \end{cases}, \tag{2.5}$$

由于 $s \perp u, r_1 \perp u \Longrightarrow (I - uu^T)s = s, (I - uu^T)r_1 = r_1$.(2.5) 等于

$$\begin{cases} (I - uu^T)(A_1 - \sigma B_1 - \tau C_1)(I - uu^T)s = -r_1 \\ s \perp u \end{cases}. \tag{2.6}$$

可以验证由方程 $(I - uu^T)(A_1 - \sigma B_1 - \tau C_1)(I - uu^T)\hat{s} = -r_1$ 求得的解 $\hat{s}$, 那么 $s = (I - uu^T)\hat{s}$ 为上述方程 (2.6) 的解. 把 s 与 U_k 做正交, 得到 $\hat{u}_{k+1} = (I - U_k U_k^T)s = (I - U_k U_k^T)(I - uu^T)\hat{s} = (I - U_k U_k^T)\hat{s}$. 由此说明用 s, 还是用 $\hat{s}$ 来扩张空间所得到的基是一样的. 所以用 (2.6) 式和用 $(I - uu^T)(A_1 - \sigma B_1 - \tau C_1)(I - uu^T)s = -r_1$ 作为校正方程是一样的. 于是就得到了用于扩展基 U_k 的校正方程

$$(I - uu^T)(A_1 - \sigma B_1 - \tau C_1)(I - uu^T)s = -r_1;$$

同理可得用于扩展基 V_k 的校正方程

$$(I - vv^T)(A_2 - \sigma B_2 - \tau C_2)(I - vv^T)t = -r_2.$$

简要介绍一下算法 1 中出现的参数, $W_{11} = A_1 U, W_{12} = B_1 U, W_{13} = C_1 U, W_{21} = A_2 V, W_{22} = B_2 V, W_{23} = C_2 V$.

$$\begin{aligned} &H_{11} = U^T A_1 U, \quad H_{12} = U^T B_1 U, \quad H_{13} = U^T C_1 U, \\ &H_{21} = V^T A_2 V, \quad H_{22} = V^T B_2 V, \quad H_{23} = V^T C_2 V. \end{aligned} \tag{2.7}$$

算法 1. *求解右定两参数特征值问题的 Jacobi-Davidson 类型的算法*

1. 开始: 选择单位初始向量 u, v, 那么 $U_1 = [u], V_1 = [v]; W_{11} = AU_1, H_{11} = {U_1}^T W_{11}$. 类似的得到其它初始值 $W_{ij}, H_{ij}, i = 1,2; j = 1,2,3$ 且 $\sigma = \varrho_1(u,v), \tau = \varrho_2(u,v)$, 并计算残量 r_1, r_2.

2. 循环: *for* $k = 2 \cdots k_{max}$

   - 解方程
   $$(I - uu^T)(A_1 - \sigma B_1 - \tau C_1)(I - uu^T)s = -r_1,$$
   $$(I - vv^T)(A_2 - \sigma B_2 - \tau C_2)(I - vv^T)t = -r_2.$$
   .
   - 将 s, t 分别与 U_k, V_k 做 *Gram-Schmidt* 正交化得到 u_{k+1}, v_{k+1},$U_{k+1} = [U_k, u_{k+1}], V_{k+1} = [V_k, v_{k+1}]$.
   - 更新其他参量 $w_{11} = A_1 u_{k+1}, W_{11} = [W_{11}, w_{11}], H_{11} = [H_{11}, U_k^T w_{11}; u_{k+1}^T W_{11}]$. 以及其他的 W_{ij}, H_{ij}.
   - 使用文献 [14] 的方法，计算小型问题
   $$H_{11}c = \sigma H_{12}c + \tau H_{13}c,$$
   $$H_{21}d = \sigma H_{22}d + \tau H_{23}d,$$
   中想要的特征值 (σ, τ), 以及所对应的特征向量 $c \otimes d$.
   - 计算 $u = U_{k+1}c, v = V_{k+1}d$, 和残量
   $$r_1 = (A_1 - \sigma B_1 - \tau C_1)u,$$
   $$r_2 = (A_2 - \sigma B_2 - \tau C_2)v.$$
   - 计算
   $$\rho = \sqrt{\|r_1\|^2 + \|r_2\|^2},$$
   判断是否 $\rho < tol(10^{-8})$, 若满足则停止迭代，否则继续循环.

3. 重起: 当 U_k, V_k 的维数超过 k_{max} 时，使用 k_{min} 维的正交基进行重起.

第三章　两参数特征值问题的 Ritz 值，Ritz 向量和精化 Ritz 向量的收敛性

§3.1 两参数的特征值问题的精化方法

精化的方法有 [15] 第一次提出. 对于两参数的特征值问题同样也可使用精化的方法. 在 (2.2) 得到 Ritz 值 σ, τ 后，计算满足以下条件的 $\tilde{u}, \tilde{v}$

$$\tilde{u} = \underset{\bar{u} \in \mathcal{U}_k, \|\bar{u}\|=1}{argmin} \|(A_1 - \sigma B_1 - \tau C_1)\bar{u}\|, \tag{3.1}$$

$$\tilde{v} = \underset{\bar{v} \in \mathcal{V}_k, \|\bar{v}\|=1}{argmin} \|(A_2 - \sigma B_2 - \tau C_2)\bar{v}\|. \tag{3.2}$$

这里的 $argmin$ 表示最小二乘问题的解. 用这两个最小二乘问题求得的 $\tilde{u}, \tilde{v}$ 代替 u, v 作为 x_1, x_2 的近似. $\tilde{u} \otimes \tilde{v}$ 称为精化 Ritz 向量. 令

$$\tilde{\sigma} = \rho_1(\tilde{u}, \tilde{v}),$$

$$\tilde{\tau} = \rho_2(\tilde{u}, \tilde{v}).$$

这里 $(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$ 称为精化 Ritz 值，它代替 Ritz 值作为特征值的近似. 而且有以下二个性质：

性质 3.1. *令新的残量 $\tilde{r}_1 = (A_1 - \tilde{\sigma} B_1 - \tilde{\tau} C_1)\tilde{u}, \tilde{r}_2 = (A_2 - \tilde{\sigma} B_2 - \tilde{\tau} C_2)\tilde{v}$, 那么有 $\tilde{r}_1 \perp \tilde{u}, \tilde{r}_2 \perp \tilde{v}$.*

性质 3.2. *$\tilde{u} = U_k \tilde{c}, \tilde{v} = V_k \tilde{d}$. 这里的 $\tilde{c}, \tilde{d}$ 分别是 $(A_1 - \sigma B_1 - \tau C_1)U_k$ 和 $(A_2 - \sigma B_2 - \tau C_2)V_k$ 的最小奇异值所对应的右奇异向量.*

性质 1 用 tensor Rayleigh 商的定义代入便可以验证得到；性质 2 利用式子

$$\min_{\bar{u} \in \mathcal{U}_k, \|\bar{u}\|=1} \|(A_1 - \sigma B_1 - \tau C_1)\bar{u}\| = \min_{\bar{c} \in \mathcal{R}^k, \|\bar{c}\|=1} \|[(A_1 - \sigma B_1 - \tau C_1)U_k]\bar{c}\|$$

可以证得.

§3.2 收敛性分析

在说明收敛性之前, 先引进一个向量和空间夹角的定义. 令 $\varphi(x_1,\mathcal{U}_k)$ 表示单位向量 x_1 与空间 $\mathcal{U}_k$=span$\{U_k\}$ 的夹角. 它可以表示成

$$\varphi(x_1,\mathcal{U}_k) = \arcsin\|(I-\pi_{\mathcal{U}_k})x_1\|,$$

这里的 $\pi_{\mathcal{U}_k}$ 表示空间 $\mathcal{U}_k$ 上的正交投影， $\pi_{\mathcal{U}_k}=U_kU_k^T$. 类似的可以定义 $\varphi(x_2,\mathcal{V}_k)$.

文献 [12] 给出了 Ritz 向量和精化 Ritz 向量的收敛性定理.

定理 1. *([12] 定理 5.1)*

$$\|(A_1-\sigma B_1-\tau C_1)\tilde{u}\| \le \frac{|\lambda-\sigma|\|B_1\|+|\mu-\tau|\|C_1\|+\|(A_1-\sigma B_1-\tau C_1)\|\sin\varphi(x_1,\mathcal{U}_k)}{\sqrt{1-\sin^2\varphi(x_1,\mathcal{U}_k)}},$$

$$\|(A_2-\sigma B_2-\tau C_2)\tilde{v}\| \le \frac{|\lambda-\sigma|\|B_2\|+|\mu-\tau|\|C_2\|+\|(A_2-\sigma B_2-\tau C_2)\|\sin\varphi(x_2,\mathcal{V}_k)}{\sqrt{1-\sin^2\varphi(x_2,\mathcal{V}_k)}},$$

这里的 $\tilde{u},\tilde{v}$ 如 (3.1), (3.2) 所定义.

文献 [12] 的作者认为精化 Ritz 向量需要更多的条件才能收敛, 即除了 $\varphi(x_1,\mathcal{U}_k)\to 0, \varphi(x_2,\mathcal{V}_k)\to 0$, 还需要 Ritz 值 $\sigma\to\lambda$,$\tau\to\mu$. 但事实并非如此，定理 2 将说明 $\varphi(x_1,\mathcal{U}_k)\to 0, \varphi(x_2,\mathcal{V}_k)\to 0$ 与 Ritz 值收敛是一样的.

定理 2. 若 x_1,x_2 为单位向量， $x_1\otimes x_2$ 是特征值 (λ,μ) 所对应的特征向量. 令 $\theta=\varphi(x_1,\mathcal{U}_k), \eta=\varphi(x_2,\mathcal{V}_k)$, $\hat{U}=[U_k,U_\perp], \hat{V}=[V_k,V_\perp]$ 是正交矩阵. 那么存在 E_1,E_2

$$\|E_1\| \le \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}(\|A_1\|+|\lambda|\|B_1\|+|\mu|\|C_1\|),$$

$$\|E_2\| \le \frac{\sin\eta}{\sqrt{1-\sin^2\eta}}(\|A_2\|+|\lambda|\|B_2\|+|\mu|\|C_2\|),$$

使得 (λ,μ) 是两参数特征值问题

$$(H_{11}+E_1)c = \sigma H_{12}c+\tau H_{13}c, \tag{3.3}$$

$$(H_{21}+E_2)d = \sigma H_{22}d+\tau H_{23}d, \tag{3.4}$$

特征值. 这里的 $H_{11}\cdots H_{23}$ 如 *(2.7)* 中所定义.